

# 誘電体表面での光の屈折と反射

透明な誘電体媒質の属性とそれに入射する光の成分を以下のように定義する。

媒質1の比誘電率  $\epsilon_1$ 、比透磁率  $\mu_1$ 、屈折率  $n_1 = (\epsilon_1 \mu_1)^{1/2}$

媒質2の比誘電率  $\epsilon_2$ 、比透磁率  $\mu_2$ 、屈折率  $n_2 = (\epsilon_2 \mu_2)^{1/2}$

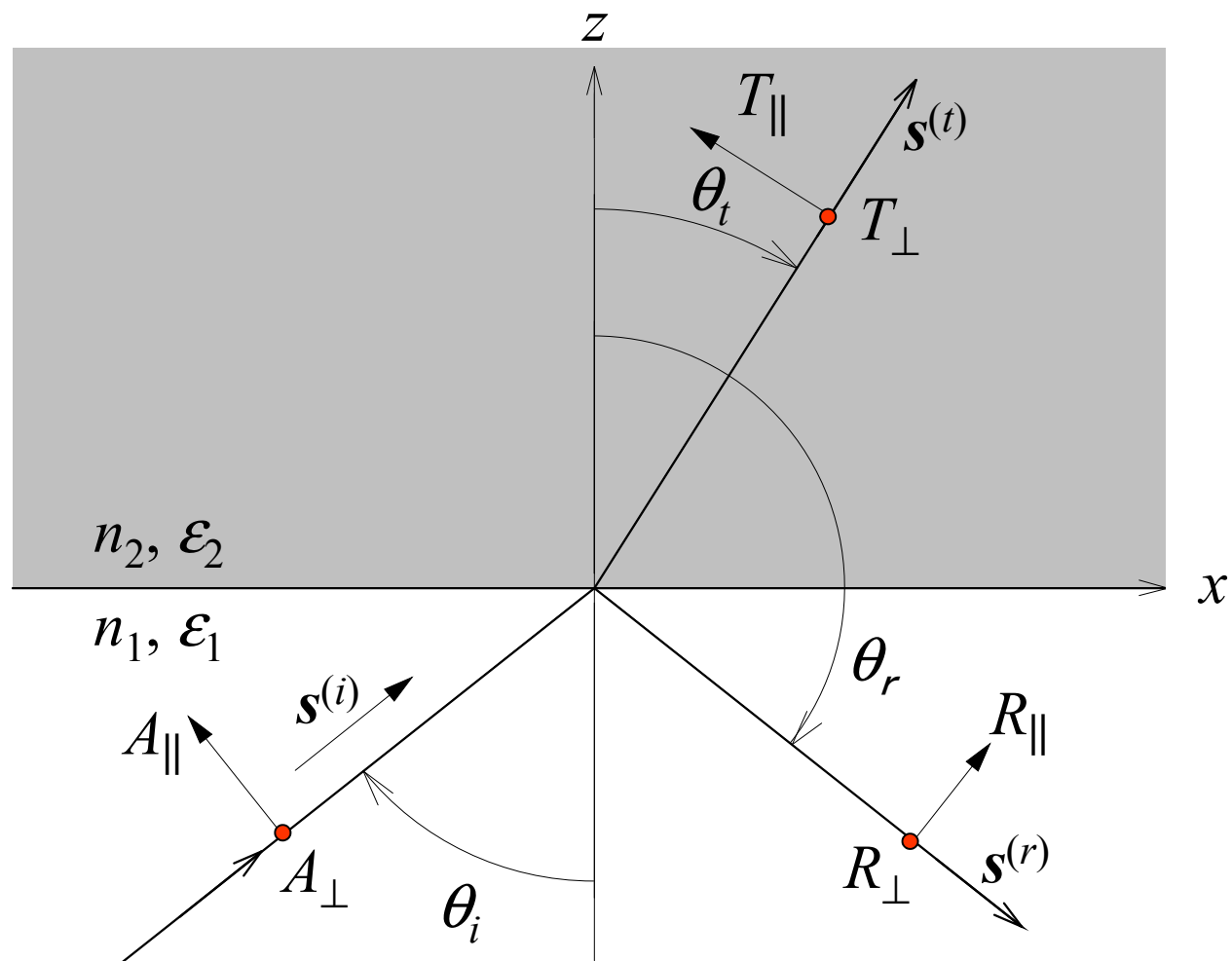
入射波の振幅  $A$  (入射面に平行 $A_{\parallel}$ , 垂直 $A_{\perp}$ )

透過波の振幅  $T$  (入射面に平行 $T_{\parallel}$ , 垂直 $T_{\perp}$ )

反射波の振幅  $R$  (入射面に平行 $R_{\parallel}$ , 垂直 $R_{\perp}$ )

光の入射角  $\theta_i$ 、反射角  $\theta_r$ 、屈折角  $\theta_t$

座標系と電場成分の向きを下図のようにとる。



単位ベクトル  $s$  で示される方向に伝播する平面波の位相は、定数項を除いて

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega \left( t - \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{\omega} \right) = \omega \left( t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v} \right) \quad (1)$$

のように表される。ここで  $v$  は任意の媒質中における光の伝播速度である。仮定している二つの媒質の境界 ( $z=0$ ) においては入射波、透過波および反射波は同じ位相の変化を示すから

$$t - \frac{\vec{s}^{(i)} \cdot \vec{r}}{v_1} = t - \frac{\vec{s}^{(r)} \cdot \vec{r}}{v_1} = t - \frac{\vec{s}^{(t)} \cdot \vec{r}}{v_2} \quad (2)$$

すなわち、

$$\frac{xS_x^{(i)} + yS_y^{(i)}}{v_1} = \frac{xS_x^{(r)} + yS_y^{(r)}}{v_1} = \frac{xS_x^{(t)} + yS_y^{(t)}}{v_2} \quad (3)$$

である。

(3)式は境界面上の位置に依らないから

$$\frac{s_x^{(i)}}{v_1} = \frac{s_x^{(r)}}{v_1} = \frac{s_x^{(t)}}{v_2}, \quad \frac{s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{s_y^{(t)}}{v_2} \quad (4)$$

でなければならない。ここで、光の入射面を  $xz$  面内にとっているから、単位ベクトルの各成分は

$$\left. \begin{aligned} s_x^{(i)} &= \sin \theta_i, & s_y^{(i)} &= 0, & s_z^{(i)} &= \cos \theta_i \\ s_x^{(r)} &= \sin \theta_r, & s_y^{(r)} &= 0, & s_z^{(r)} &= \cos \theta_r \\ s_x^{(t)} &= \sin \theta_t, & s_y^{(t)} &= 0, & s_z^{(t)} &= \cos \theta_t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。(4)式にこれらを代入すると

$$\frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{v_1} = \frac{\sin \theta_t}{v_2} \quad (6)$$

となり、**反射の法則**と**屈折の法則**が導かれる。すなわち

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad (7)$$

より、反射の法則

$$\theta_r = \pi - \theta_i \quad (8)$$

が導かれ、また

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (9)$$

より、屈折の法則 (Snell's law)

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (10)$$

が導かれる。

境界面に入射する光の位相を  $\tau_i$ 、反射した光の位相を  $\tau_r$ 、透過した光の位相を  $\tau_t$  とすると、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= \omega \left( t - \frac{\vec{s}^{(i)} \cdot \vec{r}}{v_1} \right) = \omega \left( t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{v_1} \right) \\ \tau_r &= \omega \left( t - \frac{\vec{s}^{(r)} \cdot \vec{r}}{v_1} \right) = \omega \left( t - \frac{x \sin \theta_r + z \cos \theta_r}{v_1} \right) \\ \tau_t &= \omega \left( t - \frac{\vec{s}^{(t)} \cdot \vec{r}}{v_2} \right) = \omega \left( t - \frac{x \sin \theta_t + z \cos \theta_t}{v_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

のように表すことができる。このとき、入射光の電場の各成分を

$$E_x^{(i)} = -A_{//} \cos \theta_i e^{-i\tau_i}, \quad E_y^{(i)} = A_{\perp} e^{-i\tau_i}, \quad E_z^{(i)} = A_{//} \sin \theta_i e^{-i\tau_i} \quad (12)$$

と表せる。

一方、入射光の磁束密度は

$$\vec{B}^{(i)} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} / c \vec{s}^{(i)} \times \vec{E}^{(i)} = n_1 / c \vec{s}^{(i)} \times \vec{E}^{(i)} = 1/v_1 \vec{s}^{(i)} \times \vec{E}^{(i)} \quad (13)$$

であるが、ここでは各成分を

$$\left. \begin{aligned} B_x^{(i)} &= -\frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} A_{\perp} \cos \theta_i e^{-i\tau_i}, \\ B_y^{(i)} &= -\frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} A_{//} e^{-i\tau_i}, \\ B_z^{(i)} &= \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} A_{\perp} \sin \theta_i e^{-i\tau_i} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と表すことにする。同様にして透過波と反射波についても電場と磁束密度を表すことができ、

透過波は

$$\left. \begin{aligned}
 E_x^{(t)} &= -T_{//} \cos \theta_t e^{-i\tau_t}, & B_x^{(t)} &= -\frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{c} T_{\perp} \cos \theta_t e^{-i\tau_t}, \\
 E_y^{(t)} &= T_{\perp} e^{-i\tau_t}, & B_y^{(t)} &= -\frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{c} T_{//} e^{-i\tau_t}, \\
 E_z^{(t)} &= T_{//} \sin \theta_t e^{-i\tau_t} & B_z^{(t)} &= \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{c} T_{\perp} \sin \theta_t e^{-i\tau_t}
 \end{aligned} \right\} (15)$$

反射波は

$$\left. \begin{aligned}
 E_x^{(r)} &= -R_{//} \cos \theta_r e^{-i\tau_r}, & B_x^{(r)} &= -\frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} R_{\perp} \cos \theta_r e^{-i\tau_r}, \\
 E_y^{(r)} &= R_{\perp} e^{-i\tau_r}, & B_y^{(r)} &= -\frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} R_{//} e^{-i\tau_r}, \\
 E_z^{(r)} &= R_{//} \sin \theta_r e^{-i\tau_r} & B_z^{(r)} &= \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} R_{\perp} \sin \theta_r e^{-i\tau_r}
 \end{aligned} \right\} (16)$$

となる。



境界面に関しては、境界を含む微小な矩形領域について

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0, \quad \int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17)$$

を考慮することにより、境界条件

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(i)} + E_x^{(r)} &= E_x^{(t)}, & E_y^{(i)} + E_y^{(r)} &= E_y^{(t)}, \\ B_x^{(i)} / \mu_1 + B_x^{(r)} / \mu_1 &= B_x^{(t)} / \mu_2, \\ B_y^{(i)} / \mu_1 + B_y^{(r)} / \mu_1 &= B_y^{(t)} / \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

が導かれる。(13)～(16)式を(18)式に代入すると、入射波、反射波、透過波の振幅の関係が

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_i (A_{//} - R_{//}) &= \cos \theta_t T_{//}, \\ A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp}, \\ \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} \cos \theta_i (A_{\perp} - R_{\perp}) &= \sqrt{\varepsilon_2 / \mu_2} \cos \theta_t T_{\perp}, \\ \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} (A_{//} + R_{//}) &= \sqrt{\varepsilon_2 / \mu_2} T_{//} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と与えられる。このように入射面に対して平行な電場を持つ光成分と、垂直な電場を持つ光成分の振幅が独立の式で与えられることから、これらの光は互いに独立の光として扱えることを示している。

(19)式により

$$\left. \begin{aligned}
 T_{//} &= \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t} A_{//}, & T_{\perp} &= \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t} A_{\perp} \\
 R_{//} &= \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t} A_{//}, & R_{\perp} &= \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t} A_{\perp}
 \end{aligned} \right\} (20)$$

のように入射波の振幅に相対的な値として、透過波と反射波の振幅が与えられる。

透明媒質では多くの場合、比透磁率は 1 に近いいため、 $\mu_1=\mu_2=1$  とおくと

$$\left. \begin{aligned} T_{//} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{//}, & T_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp} \\ R_{//} &= \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{//}, & R_{\perp} &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。また屈折の法則を用いると

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (22)$$

より

$$\left. \begin{aligned} T_{//} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} A_{//}, & T_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp} \\ R_{//} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} A_{//}, & R_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

のように表すこともできる。

(23)式からは以下のことが言える。

$\theta_i + \theta_t = \pi/2$  のとき、入射面に平行な電場成分を持つ光の反射率が 0 となる。  
このときの入射角を Brewster angle という。

$\cos(\theta_i + \theta_t) = 0$  を満たす入射角を Brewster angle  $\theta_B$  とおくと

$$\theta_B = \tan^{-1}(n_2/n_1) \quad (24)$$

と表される。また、(23)式において  $\tan(\theta_i \pm \theta_t)$  および  $\sin(\theta_i - \theta_t)$  の符号によって、入射面に平行または垂直に入射した光の反射光の位相が  $\pi$  だけ変化することが分かる。すなわち、

1)  $n_2 > n_1$  のとき  $\theta_i > \theta_t$  であるから、電場が入射面に垂直な光の反射光は常に位相が  $\pi$  だけずれるが、入射面に平行な光の反射光は  $\theta_i < \theta_B$  では位相がずれず  $\theta_i > \theta_B$  で位相が  $\pi$  だけずれる。

2)  $n_2 < n_1$  のときには  $\theta_i < \theta_t$  であるから、電場が入射面に垂直な光の反射光は常に位相がずれず、入射面に平行な光の反射光は  $\theta_i < \theta_B$  では位相が  $\pi$  だけずれて  $\theta_i > \theta_B$  では位相のずれはない。

## 誘電体境界面での反射率

媒質の比透磁率を 1 としたとき

$$R_{//} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{//}, \quad R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp} \quad (25)$$

であるから、これから反射率を求めると

$$\mathfrak{R}_{//} = \left( \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2, \quad \mathfrak{R}_{\perp} = \left( \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (26)$$

となる。ただし

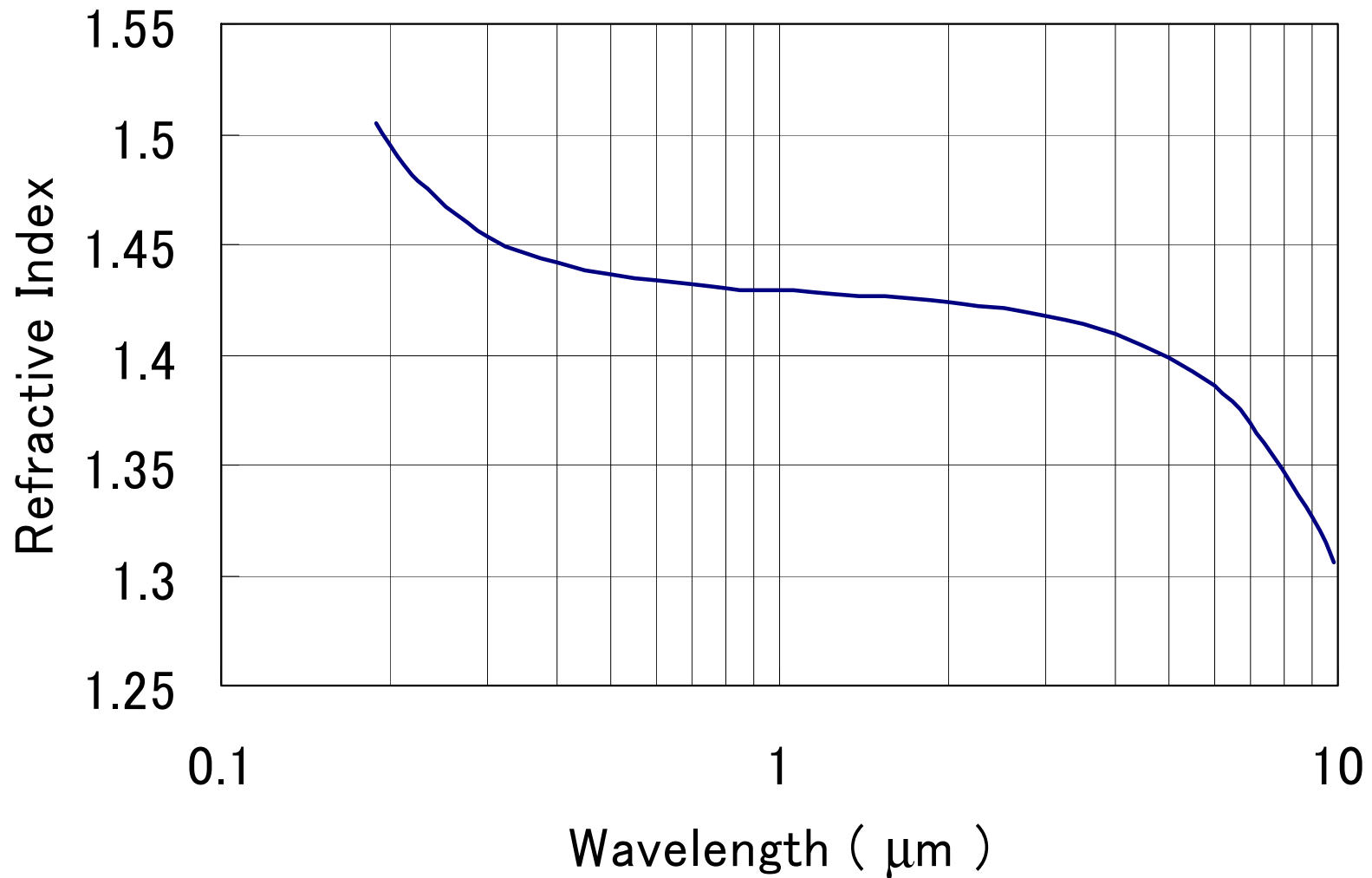
$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i} \quad (27)$$

である。

# フローライト(フッ化カルシウム $\text{CaF}_2$ ) の屈折率

参考資料サイト: [http://www.oken.co.jp/o/jpn\\_g/caf2.html](http://www.oken.co.jp/o/jpn_g/caf2.html)

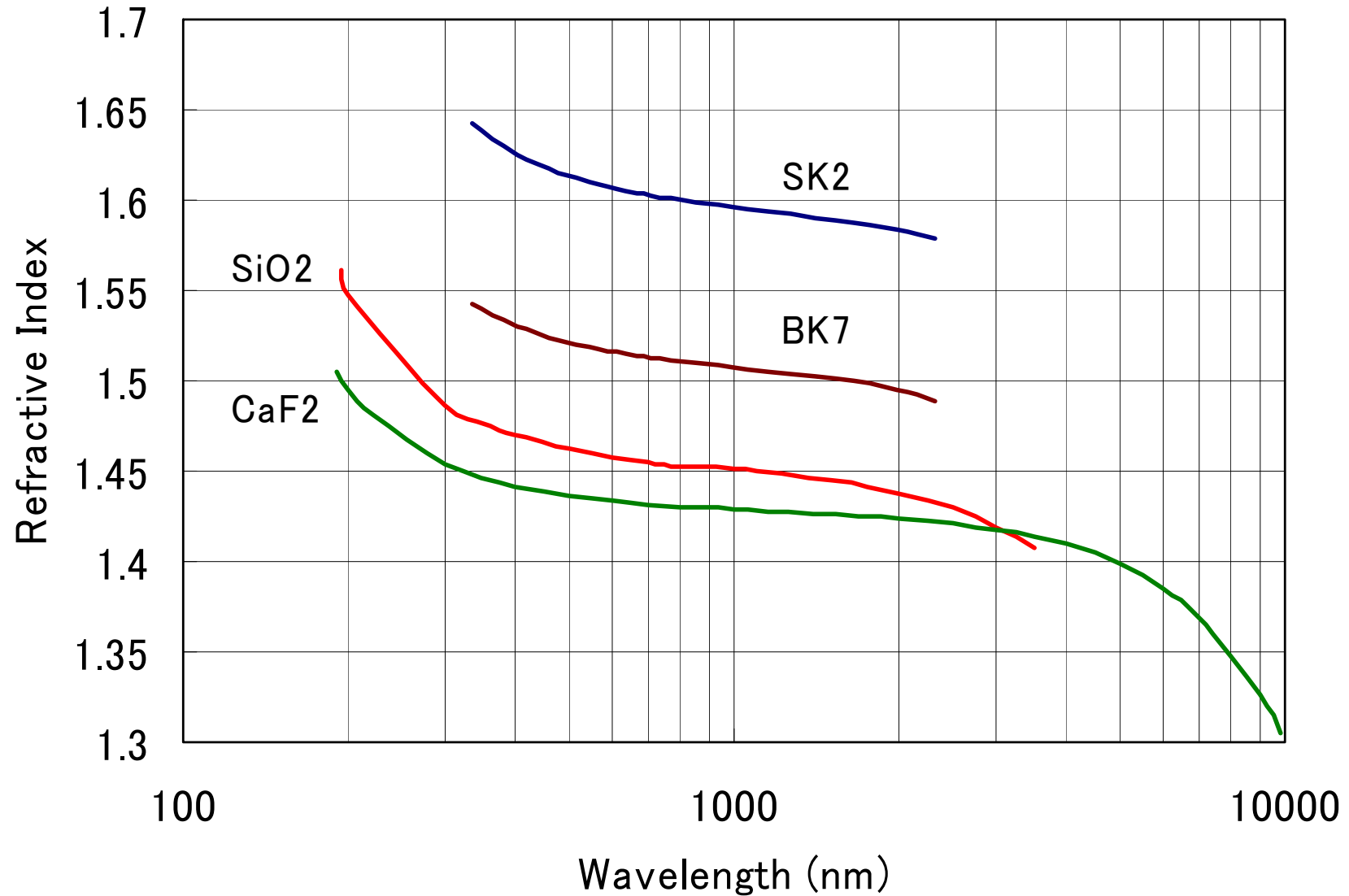
## Refractive Index of $\text{CaF}_2$



# いくつかの光学材料の屈折率データ比較

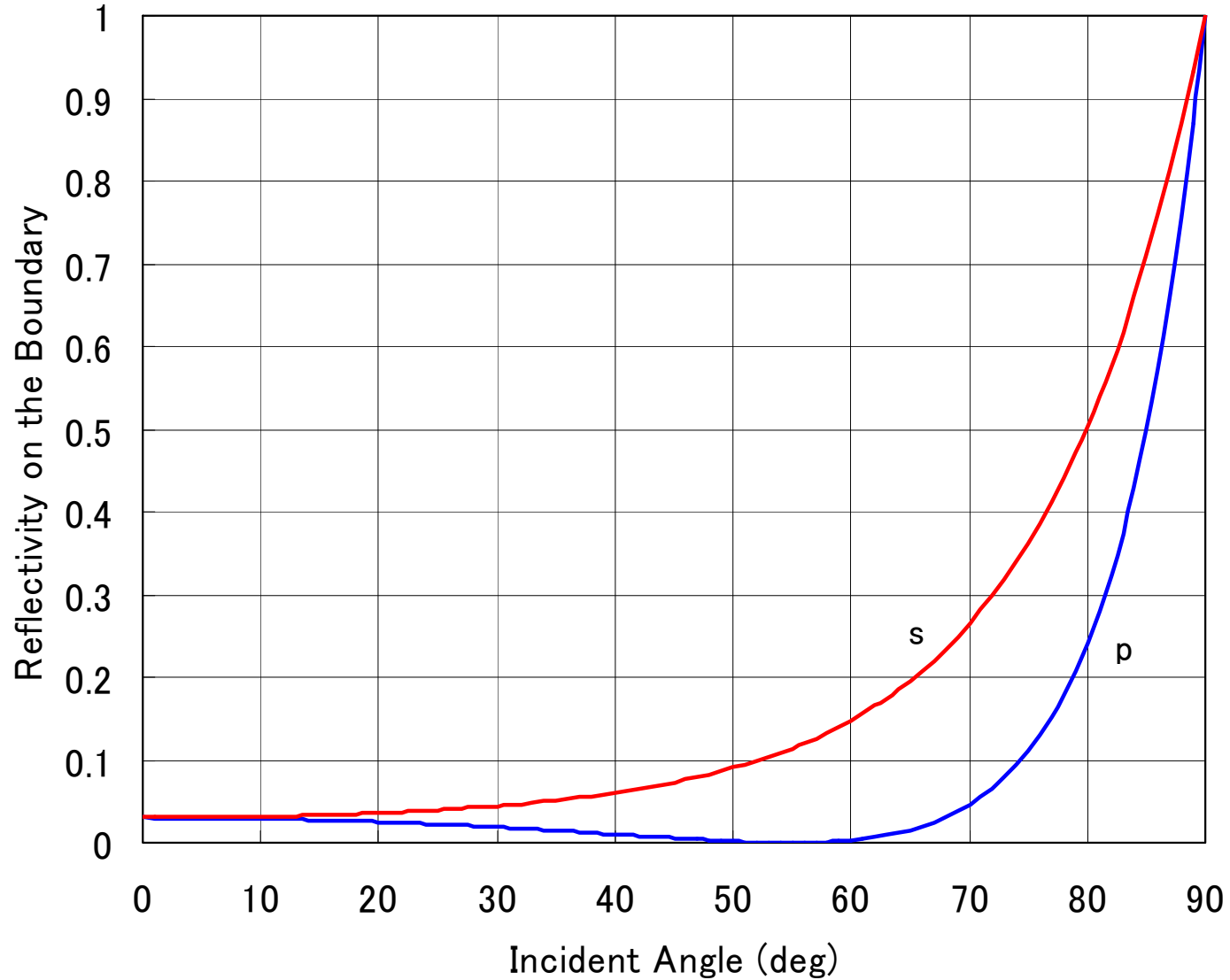
参考資料サイト: [http://www.oken.co.jp/o/jpn\\_g/caf2.html](http://www.oken.co.jp/o/jpn_g/caf2.html)

<http://www.sigma-koki.com>



# 真空から媒質に入射する光の反射率

屈折率  $n=1.42$  のとき p:入射面に平行 s:入射面に垂直

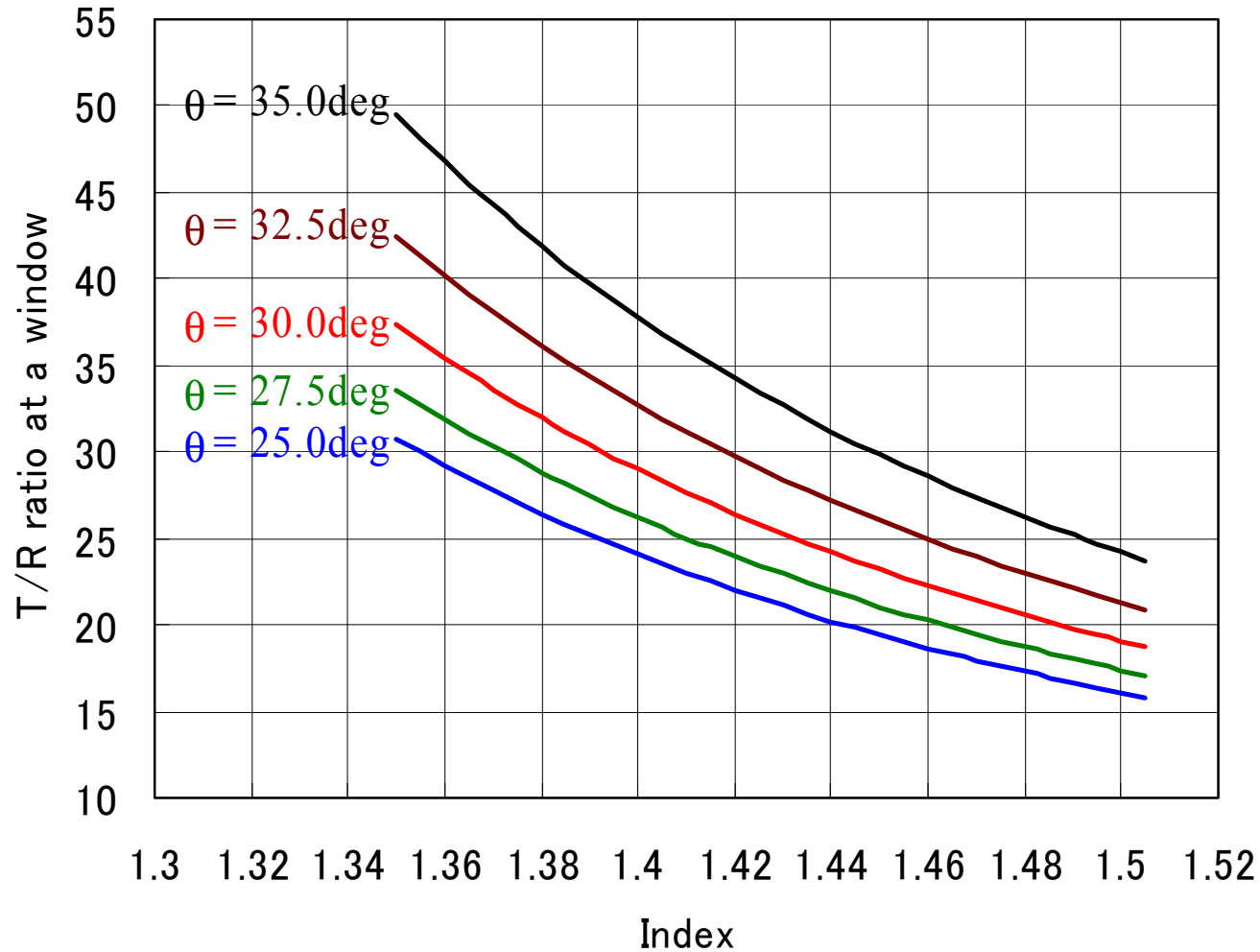




## 媒質の屈折率による光の透過/反射比

入射面に平行な電場成分の光の場合で媒質の表と裏を合計

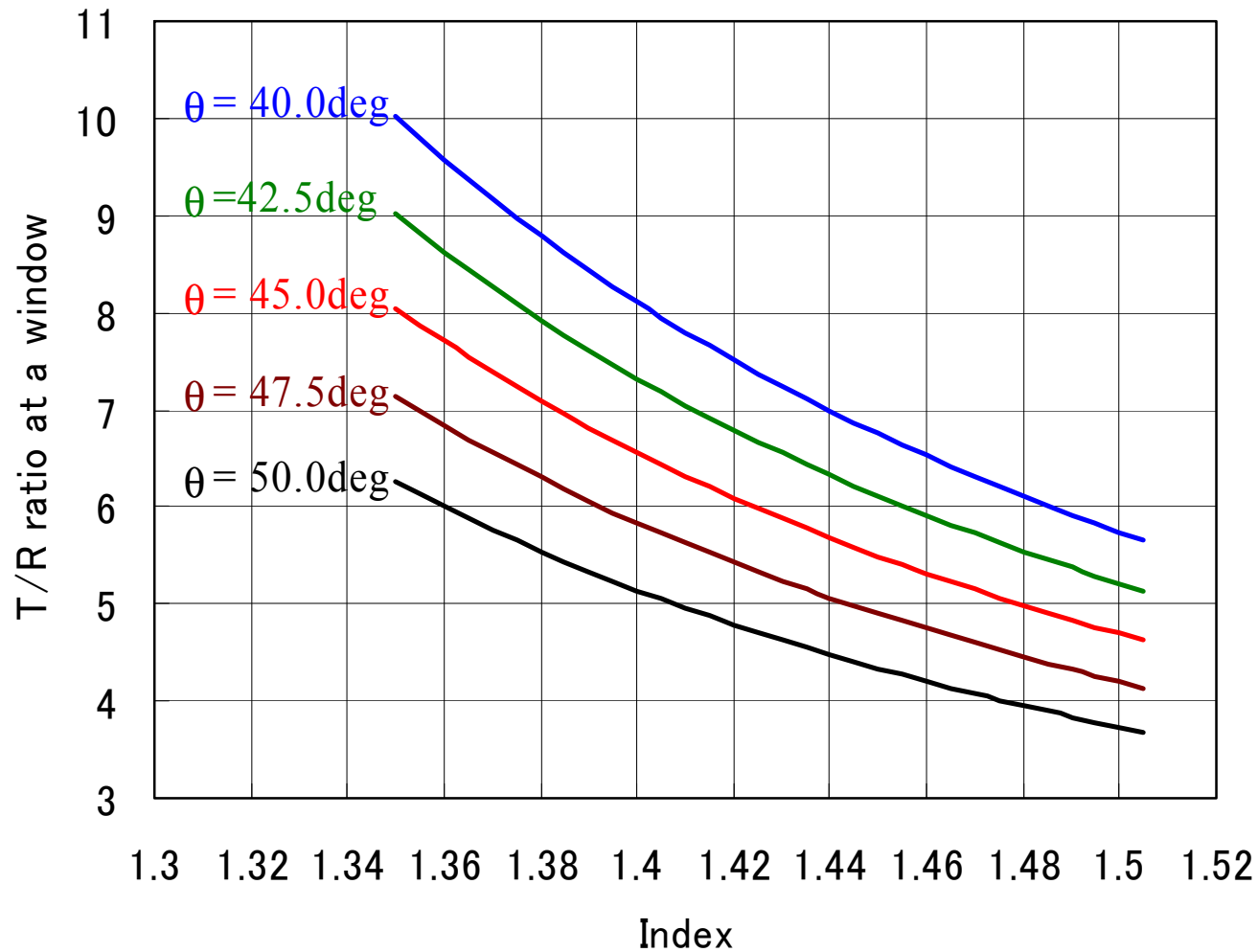
$\theta$ : 入射角 媒質中での損失は無視



## 媒質の屈折率による光の透過/反射比

入射面に垂直な電場成分の光の場合で媒質の表と裏を合計

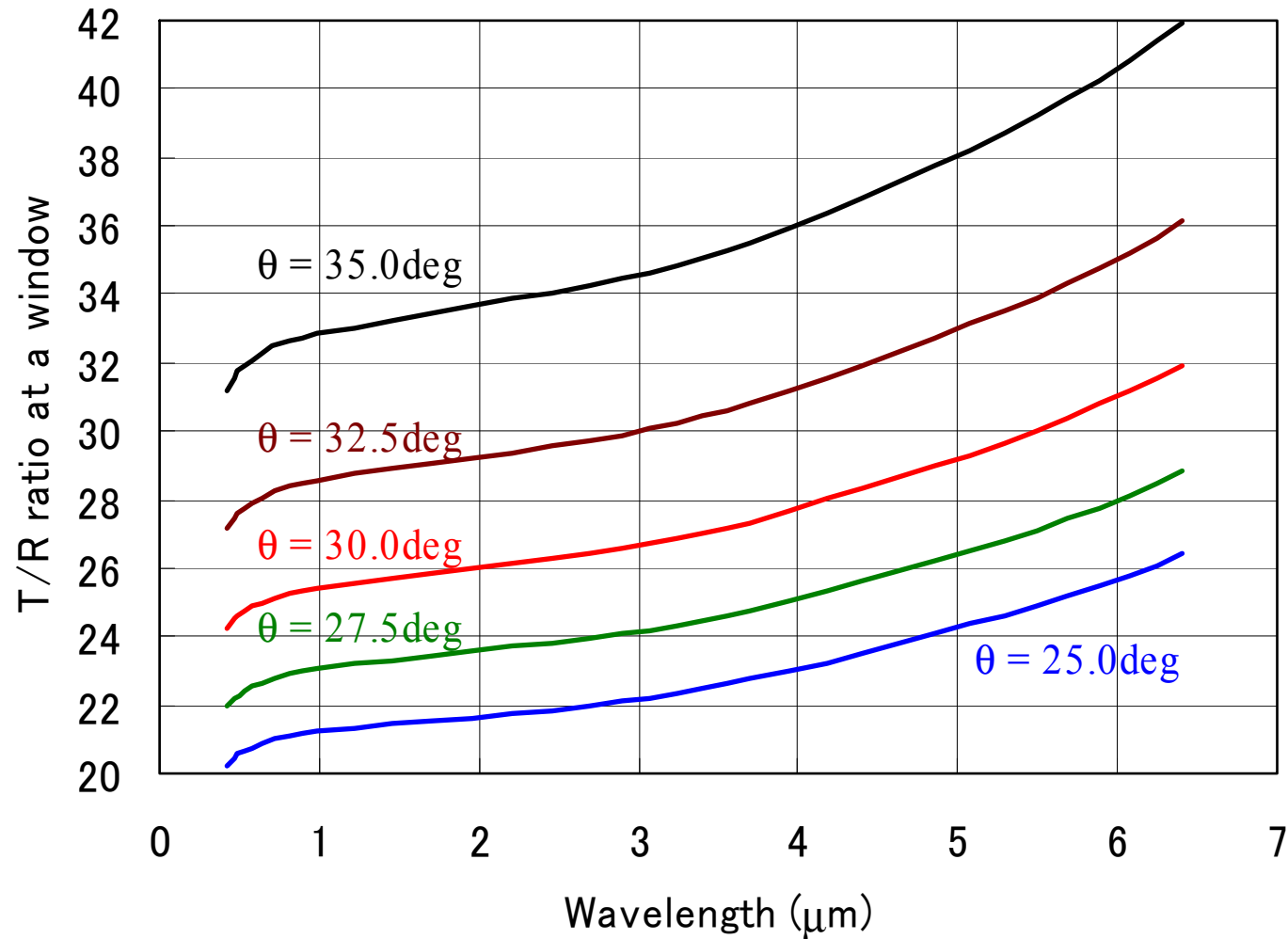
$\theta$ : 入射角 媒質中での損失は無視



## フローライト窓の透過/反射比の波長依存性

入射面に平行な電場成分の光の場合で媒質の表と裏を合計

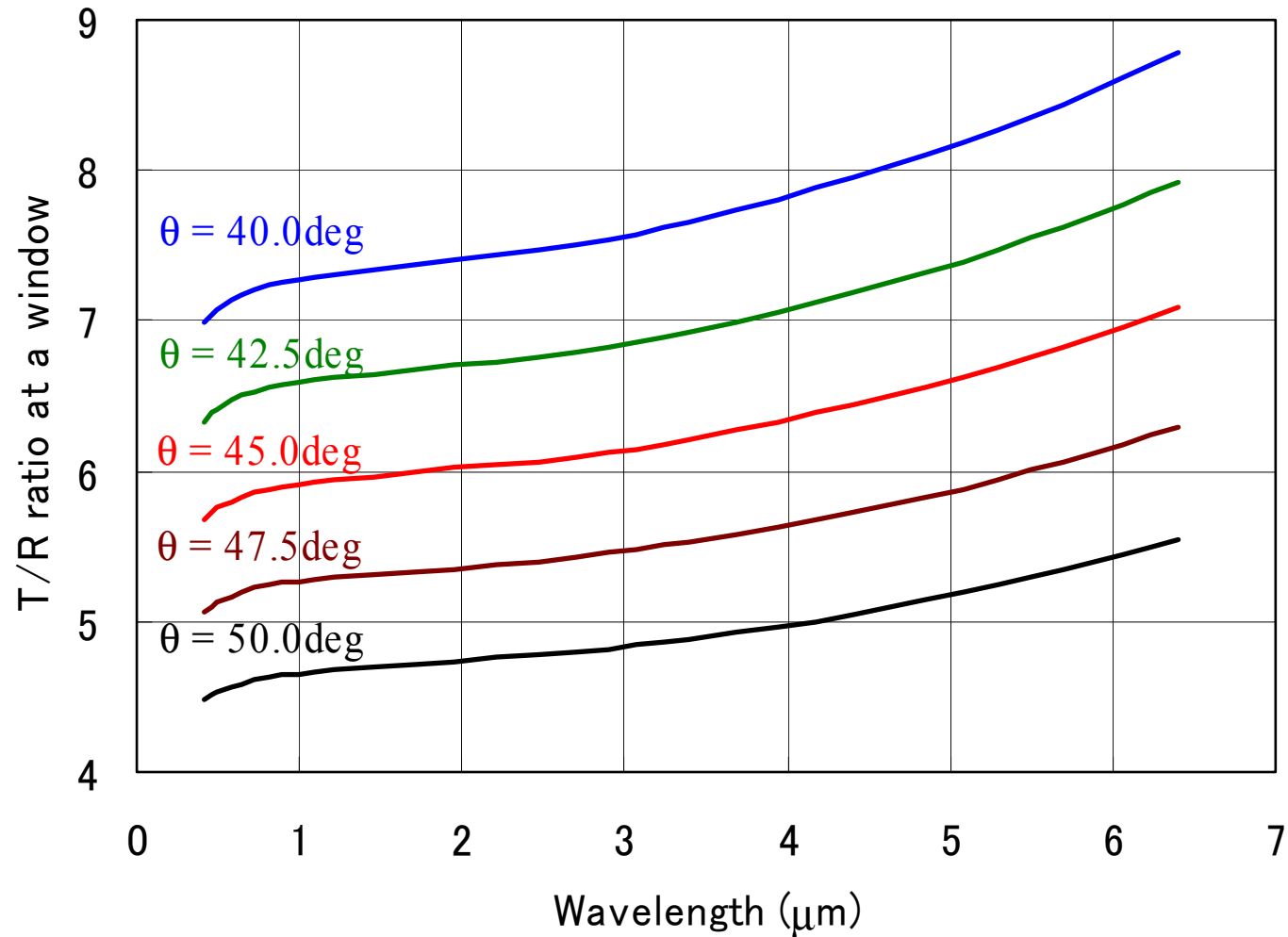
$\theta$ : 入射角 窓の内部での損失は無視



## フローライト窓の透過/反射比の波長依存性

入射面に垂直な電場成分の光の場合で媒質の表と裏を合計

$\theta$ : 入射角 窓の内部での損失は無視



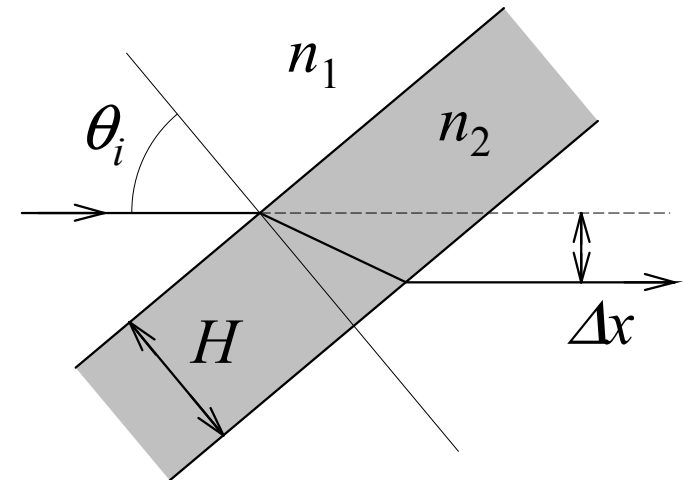
## 屈折率による透過光の光路長の伸びとビーム位置のずれ

下右図のように厚さ  $H$  の平行平面媒質に入射した光が透過する際に生ずる光路長の伸びは

$$\begin{aligned}\Delta l &= \frac{Hn_2}{\cos \theta_r} + Hn_1(\tan \theta_i - \tan \theta_r) \sin \theta_i - \frac{Hn_2}{\cos \theta_i} \\ &= Hn_1 \left[ \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i} - \frac{n_2/n_1 - \sin^2 \theta_i}{\cos \theta_i} \right] \quad (28)\end{aligned}$$

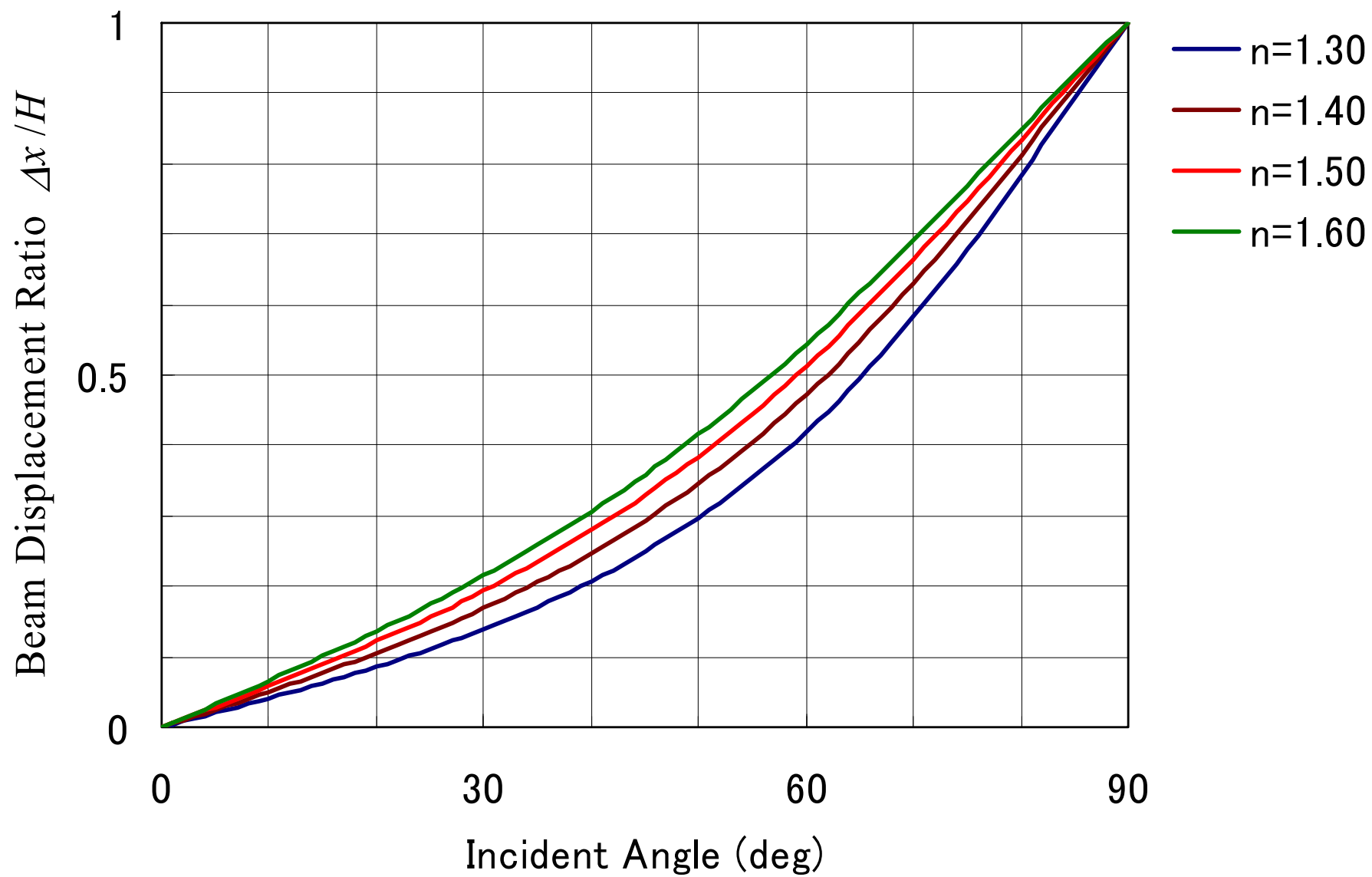
また、ビーム位置のずれは

$$\Delta x = H \sin \theta_i \left[ 1 - \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}} \right] \quad (29)$$



となる。

# 屈折率による透過光ビーム位置のずれの違い



## 表面反射光と裏面反射光の光路差とビーム位置のずれ

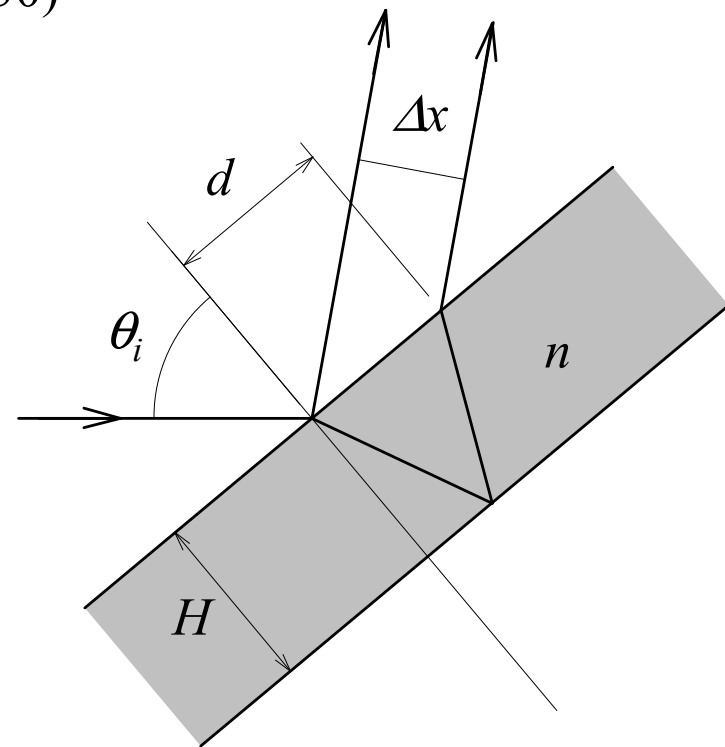
下右図のように真空中から厚さ  $H$  の平行平面媒質に入射した光の表面反射光と裏面反射光の光路差は

$$\begin{aligned}\Delta l &= \frac{2Hn}{\cos \theta_r} - d \sin \theta_i \\ &= 2H \left[ \frac{n}{\cos \theta_r} - \tan \theta_r \sin \theta_i \right] \quad (30) \\ &= 2H \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}\end{aligned}$$

と与えられる。また、表面と裏面で反射した光ビームの位置のずれは

$$\begin{aligned}\Delta x &= d \cos \theta_i \\ &= 2H \tan \theta_r \cos \theta_i \\ &= \frac{H \sin 2\theta_i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (31)\end{aligned}$$

となる。



## 屈折率の違いによる裏面反射光の光路差とビーム位置のずれ

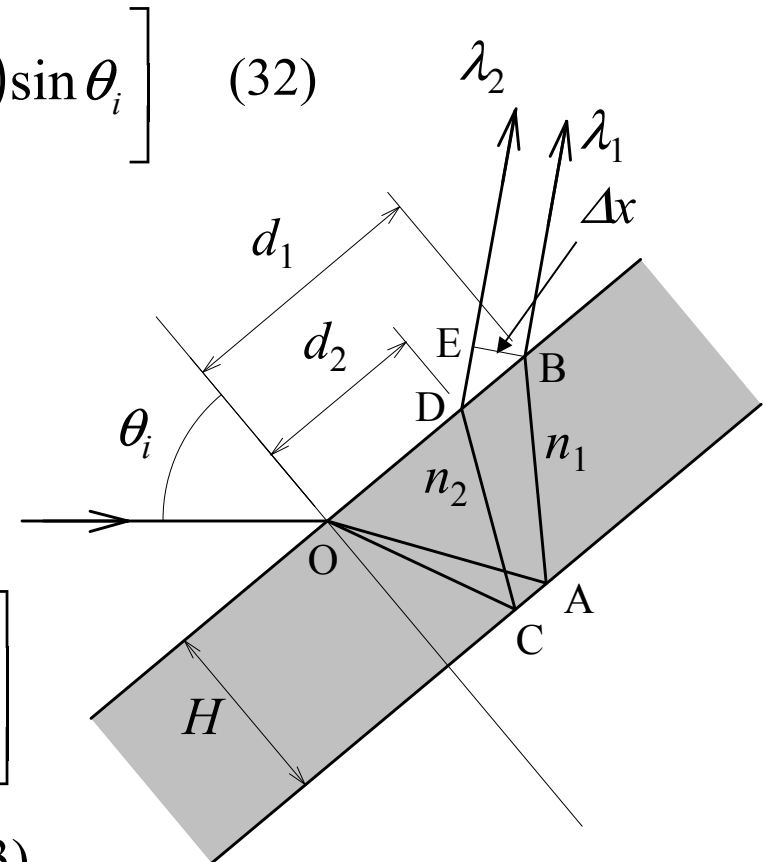
波長がそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2$ の異なる波長の光が下右図のように真空中から厚さ $H$ の平行平面媒質に入射し裏面で反射して出てきたとき、これらの光に対する屈折率( $n_1$ および $n_2$ )の違いにより生ずる光路差(OCDE - OAB)は

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{2Hn_2}{\cos \theta_{r2}} + (d_1 - d_2) \sin \theta_i - \frac{2Hn_1}{\cos \theta_{r1}} \\ &= 2H \left[ \frac{n_2}{\cos \theta_{r2}} - \frac{n_1}{\cos \theta_{r1}} + (\tan \theta_{r1} - \tan \theta_{r2}) \sin \theta_i \right] \quad (32) \\ &= 2H \left[ \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_i} - \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_i} \right] \end{aligned}$$

と与えられる。また、ビーム位置のずれ  $\Delta x$  は

$$\begin{aligned} \Delta x &= (d_1 - d_2) \cos \theta_i \\ &= 2H (\tan \theta_{r1} - \tan \theta_{r2}) \cos \theta_i \\ &= H \sin 2\theta_i \left[ \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_i}} - \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_i}} \right] \end{aligned}$$

と表される。



(33)



## マイケルソン干渉計における2波長の光路差の違い

マイケルソン干渉計により短パルスコヒーレント光の自己相関干渉を起こさせる際、ハーフミラーのベース材料の屈折率が波長依存性をもつため直交する2方向に分岐した光の光路差が波長によって異なり、その結果、検出器において干渉が観測される全反射可動ミラーの光軸方向位置は波長ごとに異なる。このときの光路差の波長依存性は(31)式から得られ、異なる2波長の光に対するベース材料の屈折率を  $n_1$ 、 $n_2$  とすると、これら2波長の光の間では光路差は

$$\Delta l = 2H \left[ \sqrt{n_2^2 - 1/2} - \sqrt{n_1^2 - 1/2} \right] \quad (34)$$

だけ異なる。従って、一方の波長の光で干渉を観測できたとき、この1/2の距離だけ可動ミラーを移動した位置でもう一方の波長の光の干渉が観測される。

